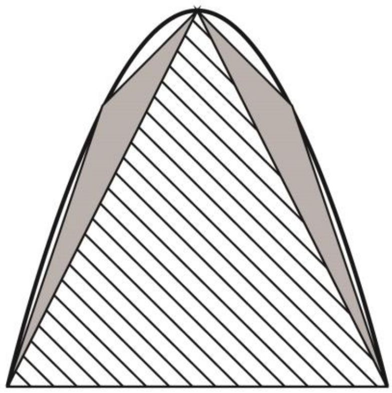
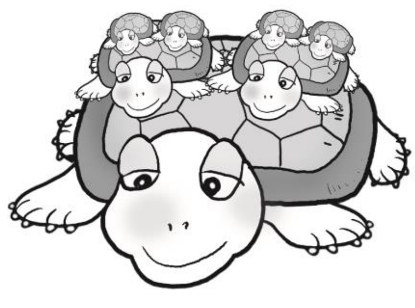
28 索數列…遞迴數列的奧妙

拋物線與弦所圍的區域稱為拋物線的弓形，世界上第一位會算拋物線弓形面積的人是兩千多年前的阿基米德。阿基米德以弦為底畫出一個三角形，之後在兩邊再各畫一個三角形，如下圖所示：



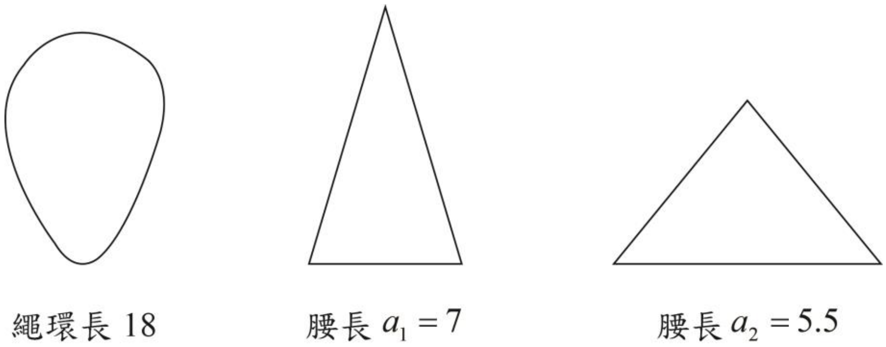
阿基米德說：「如果依照這樣的規律一直畫上去，那麼這些三角形的面積總和就會是拋物線的弓形面積。」後人利用馱龜問題來讓中學生瞭解阿基米德的巧思及其如何算得此面積公式，大意是這樣的：一隻大烏龜馱上 2 隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的八分之一，又每隻中烏龜又背著 2 隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的八分之一，如此疊上去，如下圖所示



此時所有烏龜的重量和就是拋物線的弓形面積。如果可以算得每一層烏龜的重量和，那麼所以烏龜的重量和就可以得到。

無論是弓形面積或者是烏龜的總重量，都是將他們化成數列來考慮。可見如何求出數列的規律或一般項公式就變得很重要了。這裡我們來玩一道與數列相關的操作遊戲：

將長度為 18 的繩子所構成的環形繩索拉成邊長為 7, 7, 4 的等腰三角形，然後按住此等腰三角形的一個底角，將底角兩邊的繩子平分，變成邊長為 7, 5.5, 5.5 的腰三角形。按照這樣的操作，可以不斷的產生新的等腰三角形，並假設第 n 個等腰三角形的腰長為 a_n ，如下圖所示：



試求 a_n 的公式。

因為第 n 個等腰三角形的腰長為 a_n ，所以其三邊邊長為

$$a_n, a_n, 18-2a_n.$$

此時，底邊與腰長的平均值為

$$\frac{a_n+(18-2a_n)}{2}=9-\frac{a_n}{2}.$$

根據操作，這個值就是下個等腰三角形的腰長，即

$$a_{n+1}=9-\frac{a_n}{2}.$$

我們把上述遞迴關係改寫為

$$(a_{n+1}-6)=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_n-6).$$

這個關係告訴我們數列 $\langle a_n-6\rangle$ 是首項為 $a_1-6=1$，公比是 $-\frac{1}{2}$ 的等比數列，其一般項公式為

$$a_n - 6 = (a_1 - 6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

故

$$a_n = 6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$